# การศึกษาเปรียบเทียบการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีไร้โครงตาข่าย

# THE COMPARISON OF THE FINITE ELEMENT METHOD AND MESHLESS METHOD

ปริญญา บุญมาเลิศ และ ธนู ฉุยฉาย
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต
1761 ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250

Parinya Boonmalert and Thanu Chouychai
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kasem Bundit University
1761 Pattanakarn Rd., Suanluang, Bangkok 10250, Thailand.

**บทคัดย่อ**

บทความนี้ทำขึ้นเพื่อใช้เป็นแนวทางในการตัดสินใจของผู้ที่เริ่มจะทำการศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขในงานทางวิศวกรรมหรือสำหรับนักวิจัยที่ต้องการเลือกวิธีการที่เหมาะสมในการคำนวณ จากการศึกษาวิธีการคำนวณทั้งสองวิธีนี้ พบว่าผลลัพท์ที่ได้จากการคำนวณมีความแม่นยำและเที่ยงตรงใกล้เคียงกัน ความผิดพลาด (Energy error) อยู่ในระดับ $e < 10^{-3}$ แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณงานแบบเดียวกัน พบว่าระเบียบวิธีแบบไร้โครงตาข่าย ใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เกือบสามเท่า แต่ถ้าพิจารณาการนำไปใช้ในการคำนวณที่ต้องมีการปรับเปลี่ยนจำนวนจุดขั้วหรือมีการเปลี่ยนแปลงขนาดของเอลิเมนต์ พบว่าระเบียบวิธีแบบไร้โครงตาข่าย จะทำได้ง่ายกว่าและเร็วกว่าในขั้นตอนของการเตรียมข้อมูล
**คำสำคัญ:** ระเบียบวิธีแบบไร้โครงตาข่าย**,** ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

**ABSTRACT**

This article is intended as a decision making guidelines for those who are beginning to study numerical computations in engineering works or for researchers who want to choose the appropriate method of calculation. From the study, it is found that the results obtained from the two calculation methods are similarly accurate. The energy error is at the level of $e < 10^{-3}$. However, when considering the time for computing, the results showed that the meshfree method was found to take three times longer to compute than the finite element method. Nonetheless, considering the use of calculations that require change in the number of nodes or adaptive the size of the elements, the meshfree method appeared to be more simple and faster at the stage of data preparation.

**KEYWORDS:** meshfree method, finite element method

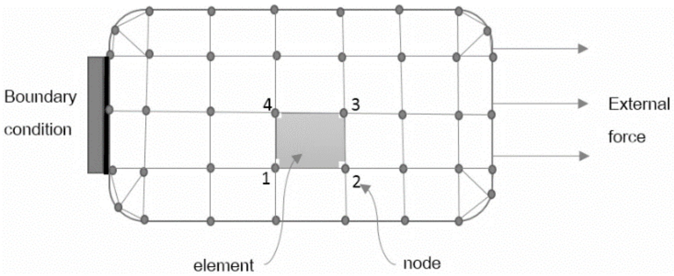
## 1. งานที่เกี่ยวข้อง

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับการพัฒนามาอย่างต่อเนื่องมากกว่า 50 ปี [1] จนเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางในงานทางด้านวิศวกรรม และมีหลายบริษัทได้สร้างโปรแกรมออกมาในเชิงพาณิชย์ เช่น แอนซิส (ANSYS), อาปาคัส (APACUS) และ โซลิสเวิร์ค (Solid Work) เป็นต้น ในปัจจุบันนี้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ยังคงมีการพัฒนาในขั้นตอนการเตรียมข้อมูลอย่างต่อเนื่อง Hang Si [2] ได้นำเสนอโปรแกรม Tetgen ซึ่งเป็นโปรแกรมสร้างเอลิเมนต์แบบปิรามิตฐานสามเหลี่ยม (Tetrahedral) และ Joachim Schoberl [3] ได้นำเสนอโปรแกรม Netgen สร้างเอลิเมนต์ที่มีฐานสามเหลี่ยมเช่นกัน โดยทั้งสองโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมแบบเปิดและให้เปล่าภายใต้เงื่อนไขสัญญาอนุญาตสาธารณะทั่วไปของกนู (GNU General Public License) G.R. LIU และ Y.T. GU. [4] ได้นำเสนอระเบียบวิธีไร้โครงตาข่ายและได้แสดงการคำนวณพร้อมโปรแกรมการคำนวณเป็นภาษาฟอร์แทรน 90 นอกจากนี้ยังได้นำเสนอ ฟังก์ชันรูปร่างแบบรัศมี (Radial basis function) หลายรูปแบบเพื่อใช้กับวิธีแบบไร้โครงตาข่ายอีกด้วย

## 2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

### 2.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้หลักการแบ่งรูปร่างของปัญหาที่สนใจ ออกเป็นชิ้นส่วนเล็กๆ เรียกว่า เอลิเมนต์ (Element) และจุดมุมที่เชื่อมต่อระหว่างเอลิเมนต์ เรียกว่าจุดขั้ว (Node) หรือจุดโนดดังรูปที่ 1




รูปที่ 1 การแบ่งเอลิเมนต์และการกำหนดจุดขั้ว

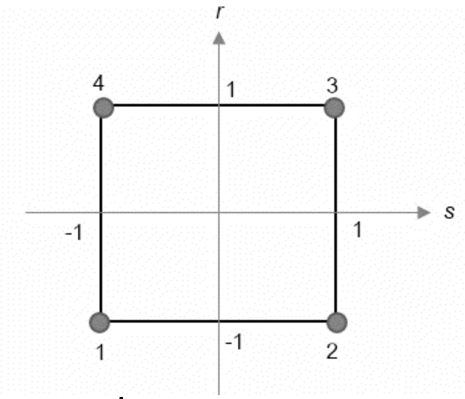
สมมติเอลิเมนต์ที่สนใจเป็นรูปสี่เหลี่ยมเพื่อความง่ายจะกำหนดให้อยู่ในพิกัดวางนัยทั่วไป (Generalized coordinate) ดังรูปที่ 2 ซึ่งจะกำหนดฟังก์ชันรูปร่างได้เป็น $N(r,s)$ โดยที่ $-1 \le r \le 1$ และ $-1 \le s \le 1$ ดังนั้นจุด $x,y$ ใดๆ จะเขียนได้เป็น

$$x(r,s) = \{N\}^T \{X_i\} \tag{1}$$

$$y(r,s) = \{N\}^T \{Y_i\} \tag{2}$$

โดยที่ $\{N\}$ คือเวกเตอร์ของฟังก์ชันรูปร่างซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} (1-r)(1-s) \\ (1+r)(1-s) \\ (1+r)(1+s) \\ (1-r)(1+s) \end{Bmatrix} \tag{3}$$




**รูปที่ 2 เอลิเมนต์ต้นแบบ**

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่างจะต้องมีคุณสมบัติเป็นดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 1 \tag{4}$$

$$N_i\left(r_j, s_j\right) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(r,s)x_i = x \quad (6)$$

สำหรับความสัมพันธ์อื่นๆ ทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง (Solid mechanics) ใน 2 มิติสามารถเขียนได้เป็นดังนี้ สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (7)$$

สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ

$$[D] = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

สำหรับปัญหาความเครียดในระนาบ

$$[D] = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0 \\ \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

และ

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

ความเครียดตามแนวแกน $x$ และ $y$ สามารถพิจารณาโดยเริ่มจากให้ $f = f(x, y)$ เมื่อประยุกต์กฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{Bmatrix} f_{,r} \\ f_{,s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} f_{,r} \\ f_{,s} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

โดยที่

$$[J] = \begin{bmatrix} \{N_{,r}\}^T \{x_i\} & \{N_{,r}\}^T \{y_i\} \\ \{N_{,s}\}^T \{x_i\} & \{N_{,s}\}^T \{y_i\} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} u_{,r} \\ u_{,s} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \{N_{,r}\}^T \\ \{N_{,s}\}^T \end{bmatrix} \{u_i\} \tag{14}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} v_{,r} \\ v_{,s} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \{N_{,r}\}^T \\ \{N_{,s}\}^T \end{bmatrix} \{v_i\} \tag{15}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \tag{16}$$

ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & N_{2,r} & 0 & \dots \\ 0 & N_{1,s} & 0 & N_{2,s} & \dots \\ N_{1,s} & N_{1,r} & N_{2,s} & N_{2,r} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{17}$$

หรือ

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B]\{q\} \tag{18}$$

จากพลังงานศักย์ $V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega$ จะได้เมตริกซ์ความแข็งตึงย่อยของเอลิเมนต์เป็น

$$[K]_e = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T [D][B] J dr ds \tag{19}$$

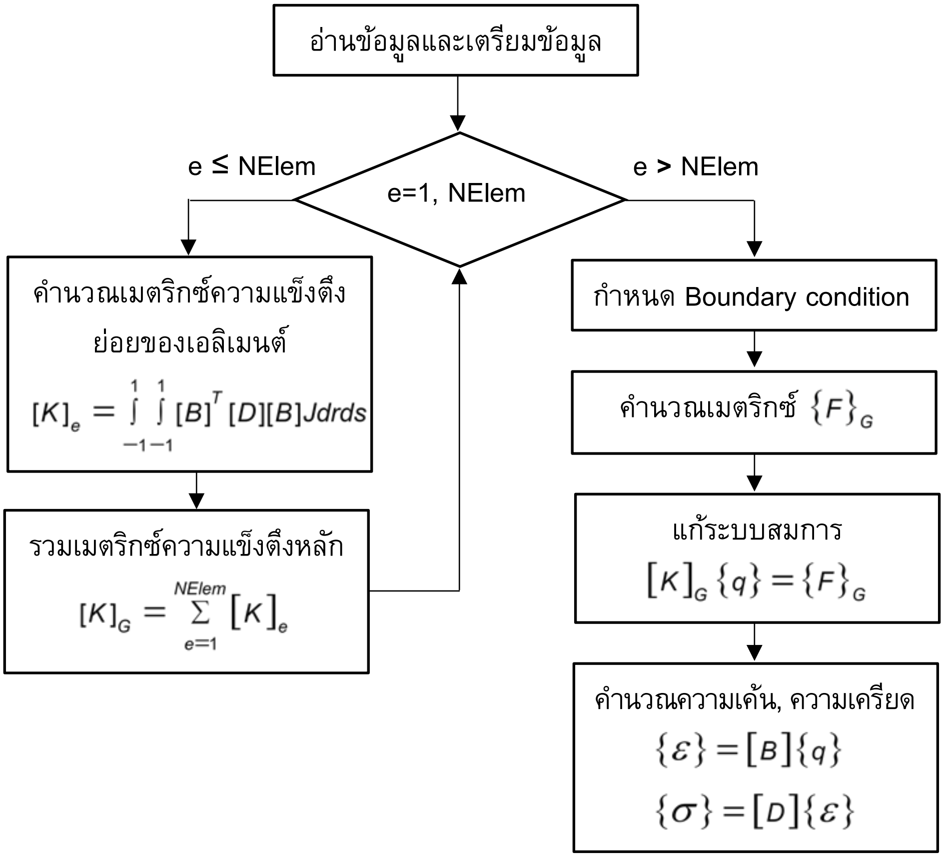
โดยที่ $J = \det[J]$ และ $[K]_e$ เป็นเมตริกซ์ความแข็งตึงย่อยของเอลิเมนต์ซึ่งเมื่อคำนวณทุกเอลิเมนต์แล้วนำมารวมกันจะได้เป็นเมตริกซ์ความแข็งตึงหลัก

$$[K]_G = \sum_{e=1}^{NElem} [K]_e \tag{20}$$

ส่วนแรงภายนอกที่กระทำกับระบบสามารถสร้างเป็นเมตริกซ์แรงรวมหลัก $\{F\}_G$ และนำมาเขียนเป็นสมการรวมของระบบได้ดังนี้

$$[K]_G \{q\} = \{F\}_G \tag{21}$$

โดยที่ $\{q\}$ เป็นระยะกระจัดของทุกๆ ความเสรีของการเคลื่อนที่ (degree of freedom) โดยสรุปกระบวนการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3



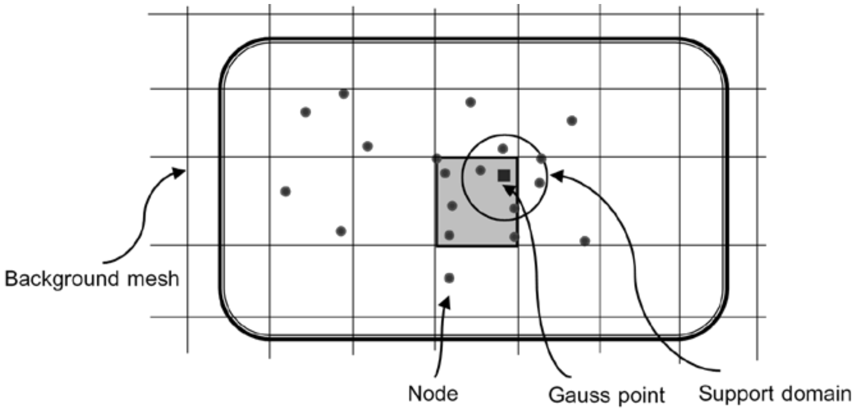

**รูปที่ 3 แผนผังของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์**

## 2.2 ระเบียบวิธีไร้โครงตาข่าย

หลักการคำนวณเกี่ยวกับการสร้างเมตริกซ์ความแข็งตึงย่อยของระเบียบวิธีไร้โครงตาข่ายจะเหมือนกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่แตกต่างกันที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะหาเมตริกซ์ความแข็งตึงจากเอลิเมนต์ แต่ในระเบียบวิธีไร้โครงตาข่ายจะหาเมตริกซ์ความแข็งตึงจากจุดเก๊าซ์ (Gauss Point) โดยระเบียบวิธีไร้โครงตาข่ายมีหลักการคือเริ่มด้วยการกำหนดจุดขั้วลงในระบบที่สนใจ แล้วสร้างโครงตาข่ายเบื้องหลัง (Background mesh) ซึ่งบางครั้งเรียกว่าเซลล์ (Cell) ดังแสดงในรูปที่ 4 ในเซลล์นี้จะทำการคำนวณหาจุดเก๊าซ์ สำหรับการอินทิเกรดเชิงตัวเลขเหมือนสมการ (19) และใช้จุดเก๊าซ์เดียวกันนี้ เป็นจุดศูนย์กลางเขียนวงกลม (Support domain) จุดขั้วทุกจุดที่อยู่ในวงกลมจะนำมาคำนวณเป็นฟังก์ชั่นรูปร่างเพื่อใช้ในการประมาณค่า (Interpolation) ของจุดเก๊าซ์นี้ เอกสารอ้างอิง[4] ได้แนะนำฟังก์ชั่นรัศมี (Radial basis function) เป็น

$$\phi_i = R_i(x,y) = \left[ r_i^2 + (2\alpha_c r_i)^2 \right]^q, \; \alpha_c \geq 0 \quad (22)$$

โดยที่ $\phi_i$ จะเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการ (4-6), $\alpha_c$ เป็นค่าคงที่โดยมีเงื่อนไขว่า $1 \leq \alpha_c \leq 2$ และ $r$ คือรัศมีซึ่งมีค่าเท่ากับระยะครึ่งหนึ่งของความกว้างของโครงตาข่ายเบื้องหลัง




**รูปที่ 4 หลักการของระเบียบวิธีไร้โครงตาข่าย**

แต่เนื่องจาก $R_i(x,y)$ จะไม่สอดคล้องกับ $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1$ อย่างสมบูรณ์ ดังนั้นในเอกสารอ้างอิง[4] จึงแนะนำให้เพิ่มฟังก์ชันพหุนามต่อท้ายกับฟังก์ชันรัศมีเป็น

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^{m} P_j(x) b_j = \{R\}^T \{a\} + \{P\}^T \{b\} \quad (23)$$

โดยที่ $P(x)$ เป็นสมการพหุนาม R(x) และ P(x) หาได้จากจุดขั้วของระบบ และ $u(x)$ ทุกตำแหน่งจุดและ $u(x)$ ทุกตำแหน่งจุดขั้วในวงกลมจะได้

$$\{u_i\} = \begin{bmatrix} [R] & [P] \\ [P] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = [G]\{A\} \quad (24)$$

และ

$$\{A\} = [G]^{-1} \{u_i\} \quad (25)$$

$$u(x) = \left[ \{R\}^T \quad \{P\}^T \right] [G]^{-1} \{u_i\} = \{\phi_i\}^T \{u_i\} \tag{26}$$

โดยที่ $\{\phi_i\}$ เป็นฟังก์ชันรูปร่าง และเมตริกซ์ $[B]$ จะกำหนดได้เป็น

$$[B] = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \ldots \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \ldots \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \ldots \end{bmatrix} \tag{27}$$

และ

$$[K]_g = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T [D][B] J dr ds \tag{28}$$

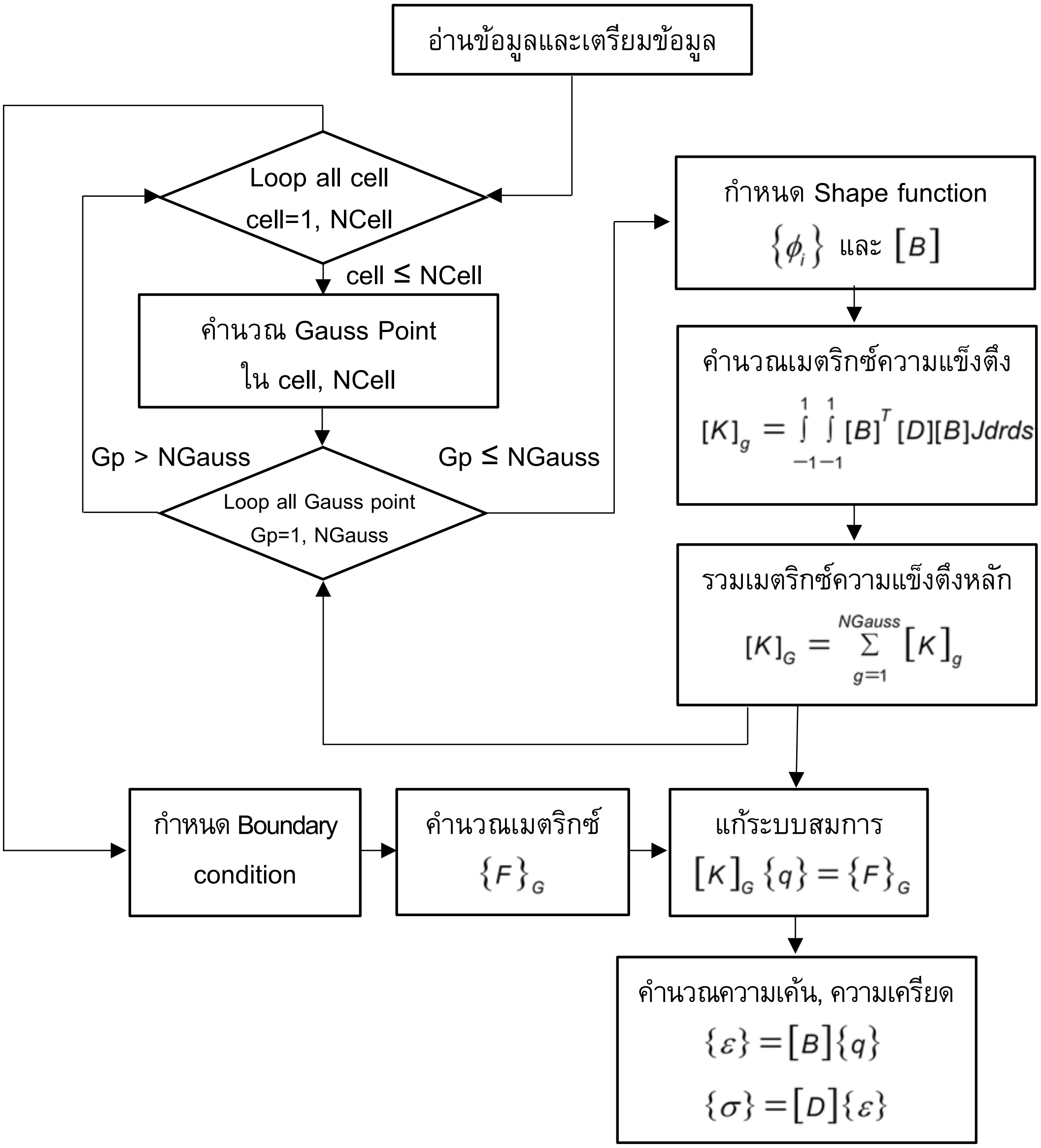
โดยสรุปกระบวนการของระเบียบวิธีไร้โครงตาข่ายสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 5

## 3. ผลการทดสอบ

ได้ทำการทดสอบการคำนวณกับแผ่นแบนทดสอบและแผ่นแบนเจาะรู [5] ตามรูปที่ 6 และ7 โดยที่แผ่นทดสอบทั้งสองมีขนาดความยาวด้านละ 1 หน่วยความยาว และมีแรงดึงแบบสม่ำเสมอ 1 หน่วยแรง/หน่วยความยาว ในการคำนวณจะใช้โครงตาข่ายแบบสามเหลี่ยม 3 จุดขั้วและแบบสี่เหลี่ยม 4 จุดขั้วเหมือนกันทั้งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีไร้โครงตาข่าย โดยที่โครงตาข่ายในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะถือว่าเป็นโครงตาข่ายเบื้องหลังของการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไร้โครงตาข่ายเพื่อให้เสมือนว่ามีจำนวนเอลิเมนต์เท่ากันและการอินทิเกรตเชิงตัวเลขให้จุดเก๊าส์ 2 จุดต่อมิติ ผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสองวิธีเท่ากันและมีความผิดพลาดเมื่อเทียบกับทฤษฎีโดยใช้การคำนวณความผิดพลาด (Energy error) จากสมการ

$$e = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon_n - \varepsilon_t\}^T \{\varepsilon_n - \varepsilon_t\} \, d\Omega} \tag{29}$$

โดยที่ $\varepsilon_n$ เป็นค่าความเครียดที่ได้จากการคำนวณและ $\varepsilon_t$ เป็นค่าความเครียดที่ได้จากทฤษฎี และความผิดพลาดที่ได้จากทั้งสองวิธีอยู่ที่ระดับ $e < 10^{-3}$

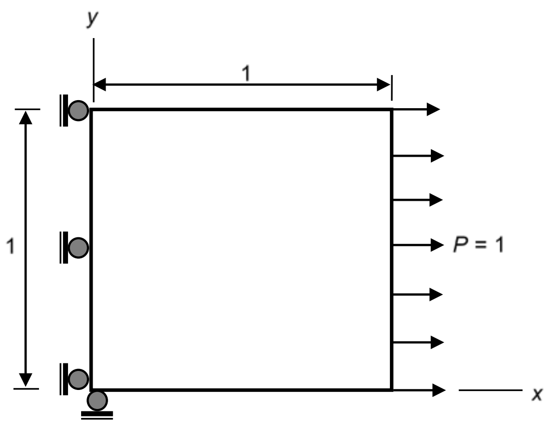



**รูปที่ 5 แผนผังของระเบียบวิธีไร้โครงตาข่าย**

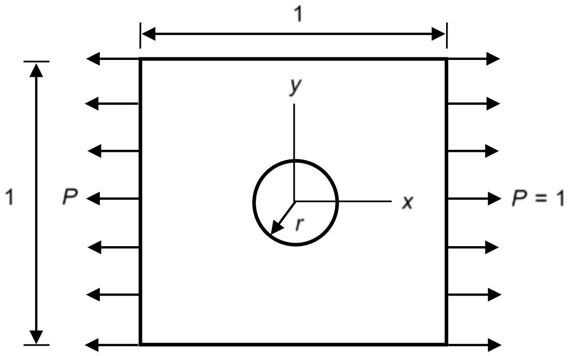
## 4. สรุปผล

จากคำนวณทดสอบทั้งสองวิธีพบว่าความเที่ยงตรงไม่มีความแตกต่างกัน สิ่งที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดเจน คือ เวลาที่ใช้ในการคำนวณ ระเบียบวิธีแบบไร้โครงตาข่ายใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เกือบ 3 เท่า เนื่องจากในการคำนวณกำหนดค่า $\alpha_c = 1.5$ ทำให้จุดขั้วรอบจุดเก๊าส์มีประมาณสามถึงสี่จุดขึ้นอยู่กับตำแหน่ง จึงส่งผลให้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นแต่ ถ้าพิจารณาในแง่ของการทำวิจัยขั้นสูง เช่น

การคำนวณรอยแตกหรือการคำนวณที่ไม่เป็นเชิงเส้น แล้วต้องมีการปรับแก้ขนาดของเอลิเมนต์ และเพิ่มจุดขั้วระเบียบวิธีไร้โครงตาข่ายจะปรับแก้ได้ง่ายกว่า




**รูปที่ 6 แผ่นแบนที่ใช้ในการทดสอบ**




**รูปที่ 7 แผ่นแบนเจาะรูที่ใช้ในการทดสอบ**

**References**

[1] Zienkiewicz OC and Taylor RL. The finite element method volume I the basis. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2000.

[2] Hang Si. TetGen A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional delaunay triangulator version 1.4user’s manual [Internet]. 2006. Available from: http//tetgen.berlios.ed

[3] Joachim Schöberl. NETGEN - an advancing front 2D/3D-mesh generator. Computing and Visualization in Science 1997;1:41-52.

[4] G.R. LIU and Y.T. GU. An introduction to meshfree methods and their programming. Netherlands: Springer; 2005.

[5] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. Theory of plates and shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company; 1959.

**ประวัติผู้เขียนบทความ**

**ปริญญา บุญมาเลิศ** ปัจจุบันดำรงตำแหน่งหัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: parinya.boo@kbu.ac.th

**ธนู ฉุยฉาย** ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ1203