

การประยุกต์ใช้สัญญาณสุ่มขาวแบบเกาส์สำหรับการสร้างแบบจำลอง
ระบบไม่เชิงเส้น

THE APPLICATION OF GAUSSIAN WHITE NOISE FOR NONLINEAR
SYSTEM MODELING

ปริญา บุญมาเลิศ¹ และ ธนู ชูยฉาย²

^{1,2}อาจารย์, สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต

1761 ถนนพัฒนาการ เขตสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250

¹parinya.boo@kbu.ac.th, ²thanuchouychai@gmail.com

Parinya Boonmalet¹ and Thanu Chouychai²

^{1,2}Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,

Kasem Bundit University 1761 Pattanakarn Rd. Suanluang, Bangkok 10250, Thailand,

¹parinya.boo@kbu.ac.th, ²thanu.cho@kbu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอการแยกฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงเส้นของระบบไม่เชิงเส้น โดยอาศัยคุณสมบัติเชิงตั้งฉากของสัญญาณสุ่มขาวแบบเกาส์เป็นสัญญาณที่ทางเข้า สัญญาณที่ทางเข้าและทางออกจะถูกเก็บอย่างต่อเนื่องแบบเวลาจริงเพื่อนำสัญญาณมาทำการเฉลี่ยและเพื่อมิให้ต้องใช้หน่วยความจำมากเกินไปจึงได้ประยุกต์ใช้การเก็บข้อมูลแบบวงกลม การทดสอบโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์พบว่าวิธีการวัดสัญญาณด้วยวิธีของกอยเดออร์สามารถแยกสัญญาณเชิงเส้นออกมาได้ดีและเมื่อนำฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้ไปคำนวณหาพารามิเตอร์เชิงเส้นของระบบ พบว่าให้ผลถูกต้องแม่นยำและมีความผิดพลาดน้อยกว่า 0.003% จุดอ่อนของการใช้วิธีนี้คือต้องเสียเวลาค่อนข้างมากเนื่องจากต้องทำการเฉลี่ยสัญญาณเป็นเวลานานและต้องตรวจสอบคุณภาพของฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยสายตา การวัดสัญญาณจะยุติเมื่อฟังก์ชันถ่ายโอนมีความเสถียร

คำสำคัญ: สัญญาณสุ่มขาวแบบเกาส์, การเก็บข้อมูลแบบวงกลม, วิธีของกอยเดออร์

ABSTRACT

This research presents the separation of the linear transfer function of nonlinear systems based on the perpendicular properties of the Gaussian White Noise signal as the input signal.

The input and output signals are continuously collected in real time to average the signal and to avoid excessive memory usage, Circular Buffer has been applied. The Goyder's technique performed well in separation linear signal for the mathematical modeling test. The transfer function also produced accurate results with a 0.003% error when it was used to calculate the linear system parameters. This method's drawback is that the signal must be averaged for a considerable amount of time and the transfer function's quality must be visually examined. When the transfer function becomes steady, the signal measurement will come to an end.

KEYWORDS: Gaussian White Noise signal, Circular Buffer, Goyder's technique

1. บทนำ

ในการวิเคราะห์ระบบไม่เชิงเส้นโดยใช้อนุกรมของวอลเตอร์รา (Volterra series) [1] พบว่าจะมีปัญหาเรื่องความซับซ้อนในการคำนวณประกอบกับการประยุกต์ใช้งานจริงในทางปฏิบัติทำได้ยาก ในทางทฤษฎีพบว่าสัญญาณสุ่มขาวแบบเกาส์ (Gaussian White Noise) [1] มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากกันทั้งในโดเมนของเวลาหรือในโดเมนของความถี่ซึ่งแล้วแต่จะเลือกใช้วิธีใด ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้คุณสมบัติเชิงตั้งฉากในโดเมนของความถี่ตามวิธีการของกอยเดอร์ (Goyder's technique) [2] ซึ่งเป็นวิธีการคำนวณหาฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับต่าง ๆ ได้ โดยไม่ต้องแยกสัญญาณที่ทางออกของระบบออกเป็นอันดับต่างตามวิธีการของ Semidor-Signoret [3] ดังนั้นในทางปฏิบัติวิธีของกอยเดอร์จึงใช้งานได้ง่ายกว่าวิธีอื่น ๆ

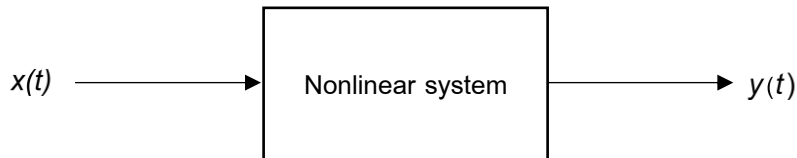
2. งานที่เกี่ยวข้อง

Goyder [2] ได้นำเอาสัญญาณสุ่มแบบเกาส์ มาใช้เป็นสัญญาณที่ทางเข้าของระบบ และเมื่อมีการเฉลี่ยสัญญาณทั้งทางเข้าและทางออกมากพอก็จะทำให้ได้ ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับต่าง ๆ แบบเดียวกับอนุกรมของวอลเตอร์ราได้ แต่เนื่องจากกอยเดอร์ตั้งสมมติฐานการเปลี่ยนสัญญาณแบบมิติเดียวไปเป็นแบบหลายมิติ จึงทำให้รูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอนตั้งแต่อันดับที่สองขึ้นไป แตกต่างจากวิธีที่คำนวณโดยตรงจากอนุกรมของวอลเตอร์รา

Boonmalert and Chouychai [4, 5] ได้แสดงวิธีการคำนวณหาฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับต่าง ๆ ของระบบไม่เชิงเส้นโดยอ้างอิงจากทฤษฎีของอนุกรมของวอลเตอร์รา และได้แสดงวิธีการประยุกต์ใช้เพื่อนำไปหาพารามิเตอร์ไม่เชิงเส้นที่เป็นสปริงแบบไม่เชิงเส้นแบบกำลังสอง (Quadratic Spring)

3. ทฤษฎี

วิธีของกอยเตอร์จะใช้สัญญาณสี่มุมแบบเกาซ์เป็นสัญญาณที่ทางเข้า เนื่องจากสัญญาณแบบนี้มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากเมื่อความถี่ไม่ตรงกันและมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ เมื่อทำการจับสัญญาณมาทำการเฉลี่ยให้มากพอ



รูปที่ 1 ระบบไม่เชิงเส้นระดับความเสรีขั้นเดียว

จากรูปที่ 1 ระบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear system) มีสัญญาณเข้า $x(t)$ ซึ่งเป็นสัญญาณสี่มุมแบบเกาซ์ และสัญญาณออก $y(t)$ ของระบบในรูปของอนุกรมของวอลเตอร์ราคือ

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i \quad (1)$$

n time

และสัญญาณออกอันดับที่ n ใดๆ ของระบบไม่เชิงเส้น ในโดเมนความถี่คือ

$$Y_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = H_n(f_1, f_2, \dots, f_n) \prod_{i=1}^n X(f_i) \quad (2)$$

โดยที่ $H_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่ n และ $X(f)$ เป็นสัญญาณเข้าของระบบในโดเมนความถี่กอยเตอร์ตั้งสมมติฐานของการแปลงสัญญาณแบบ n มิติไปเป็นสัญญาณแบบมิติเดียวเป็น

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} Y_n(f - f_2 - \dots - f_n, f_2, f_3, \dots, f_n) df_2 df_3 \dots df_n \quad (3)$$

$n-1$ time

โดยที่ $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$

เมื่อแทนสมการ (2) ใน (3) จะได้

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(f - f_2 - \dots - f_n, f_2, f_3, \dots, f_n) X(f - f_2 - \dots - f_n, f_2, f_3, \dots, f_n) \prod_{i=2}^n X(f_i) df_i \quad (4)$$

$n-1$ $time$

ครอสสเปกตรัม (Cross Spectrum) ระหว่างสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของระบบ ลำดับที่ n ใด ๆ เป็น

$$S_{yx\dots x}(f - f_2' - \dots - f_n', f_2', f_3', \dots, f_n') = E[Y(f) X^*(f - f_2' - \dots - f_n', f_2', f_3', \dots, f_n')] \quad (5)$$

โดยที่ $E[\]$ เป็นค่าเฉลี่ย และ $X^*(f)$ เป็นสังยุคเชิงซ้อน (Complex Conjugate) ของ $X(f)$ เมื่อแทน $Y(f)$ จากสมการ (4) ลงในสมการ (5) จะได้

$$S_{yx\dots x}(f - f_2' - \dots - f_n', f_2', \dots, f_n') = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(f - f_2' - \dots - f_n', f_2', \dots, f_n') \cdot E[X(f - f_2 - \dots - f_n) X^*(f - f_2 - \dots - f_n) \prod_{i=2}^n X(f_i) X^*(f_i)] / T df_i \quad (6)$$

$n-1$ $time$

และเมื่อสัญญาณเข้าของระบบเป็นสัญญาณสุ่มขาวแบบเกาส์เทอม $X(f_i) X^*(f_i) = 0$ เมื่อ $f_i \neq f_i'$ และจะมีค่าเมื่อ $f_i = f_i'$ ดังนั้น ครอสสเปกตรัมจะเป็น

$$S_{yx\dots x}(f_1, f_2, \dots, f_n) = H_n(f_1, f_2, \dots, f_n) n! \prod_{i=1}^n S_x(f_i) \quad (7)$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่ n คือ

$$H_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \frac{S_{yx\dots x}(f_1, f_2, \dots, f_n)}{n! \prod_{i=1}^n S_x(f_i)} \quad (8)$$

โดยที่ ครอสสเปกตรัมหาได้จาก

$$S_{y \dots x}(f_1, f_2, \dots, f_n) = E \left[Y(f_1 + f_2 + \dots + f_n) \prod_{i=1}^n X^*(f_i) / T \right] \quad (9)$$

และ ออโตสเปกตรัม (Auto Spectrum) คือ

$$S_{xx}(f) = E[X(f)X^*(f) / T] \quad (10)$$

4. การเก็บข้อมูลแบบวงกลม (Circular Buffer)

เนื่องจากวิธีการหาฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยวิธีของกอยเดอร์ จะต้องทำการเฉลี่ยสัญญาณตามสมการ (11) ดังนั้นวิธีการที่จะเก็บข้อมูลที่เหมาะสมคือการเก็บข้อมูลแบบเวลาจริง (Real Time) และเพื่อมิให้ต้องใช้หน่วยความจำมากเกินไปจนความจำเป็น จึงใช้หลักการเก็บข้อมูลแบบวงกลม ด้วยขนาดหน่วยความจำ $N = 2^M$ จุด โดยที่ $M = 1, 2, 3, \dots$

$$E[y(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt \quad (11)$$

ตารางที่ 1 การเก็บข้อมูลแบบวงกลม

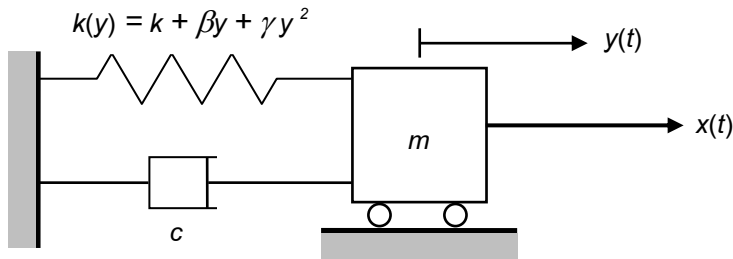
ครั้งที่	0	1	2	3	4	5	.	.	.	N-1
1	start →									end
2	end	start →								
3		end	start →							

การเก็บข้อมูลในครั้งแรกจะเก็บข้อมูลทั้ง N จุด โดยเริ่มจาก start ไปจนถึง end แล้วนำไปคำนวณหาฟังก์ชันถ่ายโอน เมื่อทำการเก็บข้อมูลจุดต่อไป ข้อมูลจะถูกเก็บที่ตำแหน่ง 0 ซึ่งเป็น start เดิมและเปลี่ยน start เป็น end ส่วน start จะขยับเลื่อนไปหนึ่งตำแหน่ง ข้อมูลที่จะนำไปคำนวณครั้งต่อไปจะกระทำจาก start ไปจนถึง end เสมอ start และ end จะขยับไป 1 จุดทุก ๆ การเก็บข้อมูลครั้งต่อไป และการคำนวณครั้งต่อไปจะทุกข้อมูลใหม่ที่เก็บเข้ามา 1 จุด การเก็บข้อมูลในลักษณะนี้ทำให้ข้อมูลมีความต่อเนื่อง

5. ผลการคำนวณ

การทดสอบผลการคำนวณหาฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยวิธีของกอยเตอร์ จะใช้ระบบระดับความเสรีชั้นเดียวที่มีสปริงไม่เชิงเส้นและเป็นฟังก์ชันของระยะกระจัดทั้งหมดกำลังหนึ่งและกำลังสอง ดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งจะทำให้ระบบเป็นสมการไม่เชิงเส้นกำลังสองและกำลังสาม ดังสมการ (12)

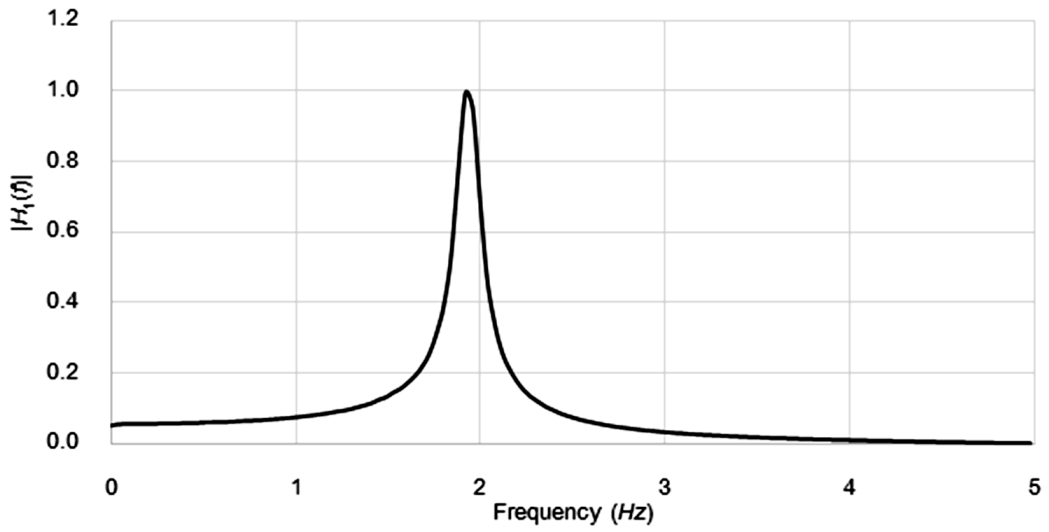
$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + \beta y^2(y) + \gamma y^3(t) = Ax(t) \quad (12)$$



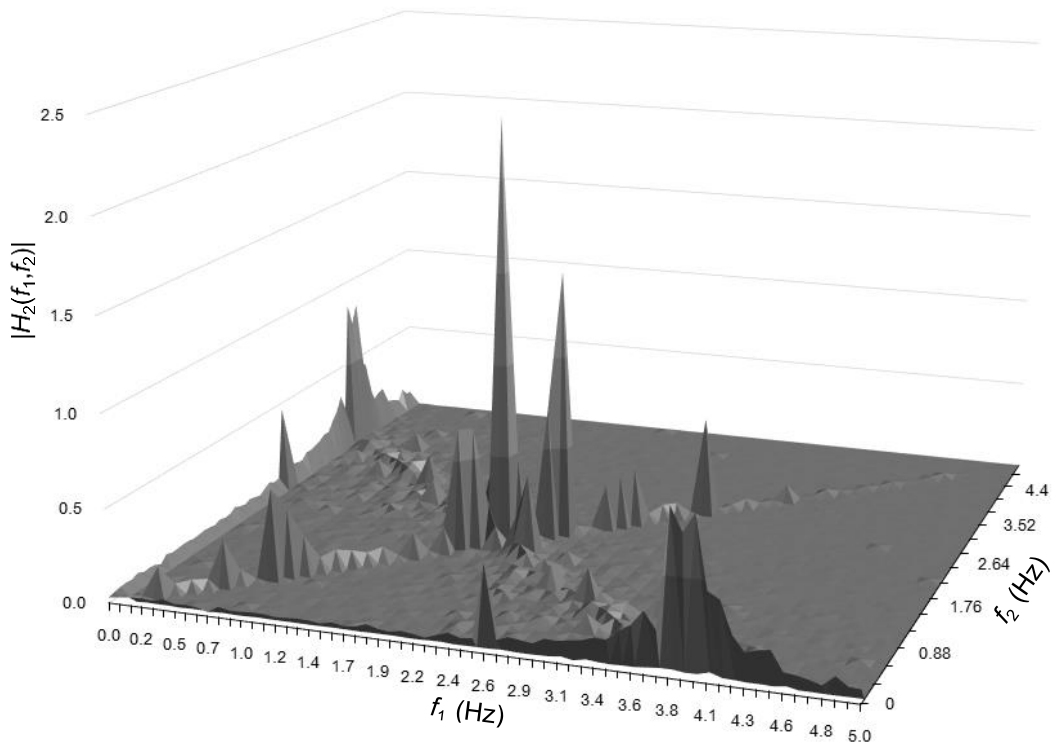
รูปที่ 2 ระบบทางกลที่ใช้ทดสอบ

ในการคำนวณกำหนดให้ $m = 1 \text{ kg}$, $c = 0.1 \text{ N.s/m}$, $k = 150 \text{ N/m}$, $\beta = 10 \text{ N/m}^2$ และ $\gamma = 10 \text{ N/m}^3$ ในส่วนของ $x(t)$ เป็นสัญญาณสุ่มขาวแบบเกาส์ โดยกำหนดให้ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.1 ส่วน $A = 10 \text{ N}$ เป็นแอมพลิจูดของแรงที่กระทำกับระบบ สำหรับสัญญาณออกของระบบ $y(t)$ จะทำการคำนวณด้วยวิธีของรุงเงกุตต้าอันดับที่สี่ (Fourth order Runge-Kutta Method) [6] ผลการคำนวณสัญญาณทั้งสัญญาณเข้าและสัญญาณออกจะถูกคูณด้วยหน้าต่างของฮานนิง (Hanning Window) ก่อนที่จะทำการแปลงตรงฟูริเยร์ (Direct Fourier Transform) และนำไปคำนวณฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับต่าง ๆ ตามสมการ (8) ต่อไป

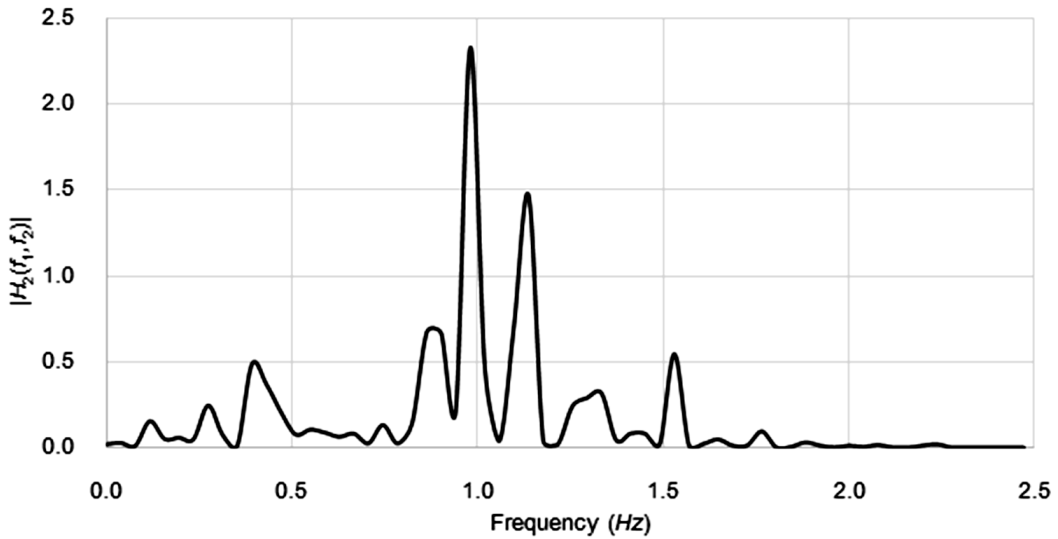
จากข้อมูลของระบบจะได้พารามิเตอร์ต่าง ๆ ของระบบ คือ $\omega_n = 12.247 \text{ rad/s}$, $s = 1.95 \text{ Hz}$ และ $\zeta = 0.00408$



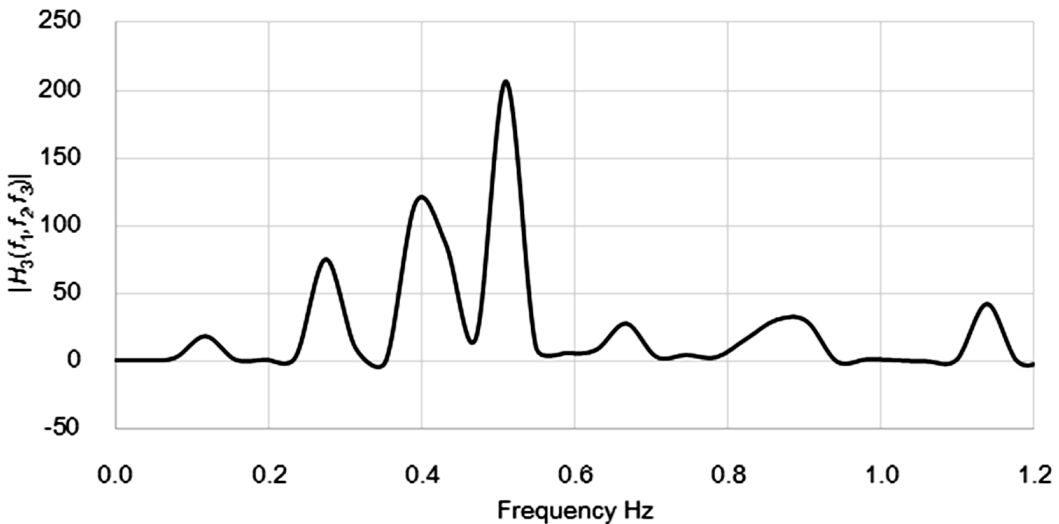
รูปที่ 3 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่ง



รูปที่ 4 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สอง



รูปที่ 5 พังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองในแนวเส้นทแยงมุม $H_2(f_1, f_2)$; $f_1 = f_2$



รูปที่ 6 พังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สามในแนวเส้นทแยงมุม $H_3(f_1, f_2, f_3)$; $f_1 = f_2 = f_3$

6. สรุป

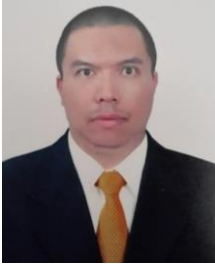
กราฟในรูปที่ 3 เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งซึ่งผ่านการเฉลี่ยมากกว่า 1,000 ครั้ง ซึ่งเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นและเมื่อนำฟังก์ชันถ่ายโอนนี้ไปทำการคำนวณหาพารามิเตอร์ของระบบเชิงเส้นจะได้ $\omega_n = 12.24701 \text{ rad/s}$ มีความผิดพลาด $8 \times 10^{-5} \%$ และ $\zeta = 0.004079$ มีความผิดพลาด 0.0024% ซึ่งถือว่ามีความเที่ยงตรงสูง ทั้งนี้เป็นเพราะได้แยกเอาฟังก์ชันถ่ายโอน

ของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นออกไปแล้ว ส่วนในรูปที่ 4 และ 5 เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองและฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม $f_1 = f_2$ ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าปรากฏความถี่ซับฮาร์โมนิก (sub harmonic) ที่ประมาณ 0.9 Hz และในรูปที่ 6 เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สามในแนวเส้นทแยงมุม $f_1 = f_2 = f_3$ ซึ่งจะเห็นซับฮาร์โมนิกอันดับสามที่ประมาณ 0.5 Hz. แต่จากรูปทั้งสองไม่สามารถมองเห็นซูเปอร์ฮาร์โมนิก (super harmonic) ได้ เนื่องจากช่วงของความถี่สูงไม่สามารถแสดงได้ในฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสูง เพราะว่าฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสอง จะใช้ความถี่สูงสุดเพียงครึ่งหนึ่งของความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่ง และฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สาม จะใช้ความถี่สูงสุดเพียง 1/3 ของความถี่สูงสุดของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่ง ในรูปที่ 5 และ 6 จะมีฮาร์โมนิกอื่น ๆ อีกมากเป็นเพราะฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองและสามยังไม่เสถียรเพียงพอ ถ้าจะให้ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่สองและสามเสถียรจะต้องทำการเจ็ลี่ยต่อไปอีก และต้องเขียนกราฟแสดงรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งสองเพื่อตรวจสอบด้วยสายตา แต่เนื่องจากงานวิจัยนี้สนใจเฉพาะการตรวจสอบคุณภาพของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับที่หนึ่งเท่านั้น ในการทำการวิเคราะห์โหมดคัล การใช้สัญญาณแบบสุ่มจะทำได้ง่ายกว่าการใช้สัญญาณแบบอื่น ข้อเสียมีอย่างเดียวคือต้องมีเครื่องมือสร้างสัญญาณแบบสุ่มเท่านั้น

References

- [1] Schetzen M. The Volterra & Wiener theory of nonlinear systems. New York: John Wiley & Sons; 1980.
- [2] Goyder HGD. Vibration analysis and identification of nonlinear structures. United Kingdom: University of Manchester; 1985.
- [3] Semidor-Signoret C. Comportements de hauts polymeres a grande vitesse de deformation, identification d'effet non lineares. [These de 3eme. Cycle en mecanique physique]. Bordeaux, France: Universite de Bordeaux I; 1981.
- [4] Boonmalert P, Chouychai T. The first and second order transfer function of hysteresis damping non-linear system. Kasem Bundit Engineering Journal 2019;9(1):152-65.
- [5] Boonmalert P, Chouychai T. Nonlinear parameter extraction of SDOF viscous damping system. Kasem Bundit Engineering Journal 2020;10(1):81-92.
- [6] Chapra SC, Canale RP. Numerical methods for engineering. 7th ed. New York, USA: McGraw-Hill; 2015.

ประวัติผู้เขียนบทความ



ดร.ปริญญา บุญมาเลิศ ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา
วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต โทรศัพท์
0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: parinya.boo@kbu.ac.th



รศ.ดร.ธนุ จุฑฉาย ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชา
วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษมบัณฑิต
โทรศัพท์ 0-2320-2777 ต่อ1203 E-mail: thanu.cho@kbu.ac.th

Article History:

Received: October 10, 2022

Revised: December 12, 2022

Accepted: December 20, 2022